9.4.5 Tejlorova formula

Tejlorova formula je jedna od najčešće korišćenih formula matematičke analize. Izvešćemo ovu formulu prvo za polinome a zatim i za druge funkcije.

Tejlorova formula za polinome

Posmatrajmo polinom $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Ako je x_0 proizvoljan realan broj, smjenom $x = x_0 + t$, odnosno $t = x - x_0$, polinom $P(x)$ možemo zapisati u obliku

$$P(x) = P(x_0+t) = a_0 + a_1(x_0+t) + \cdots + a_n(x_0+t)^n = A_0 + A_1t + \cdots + A_nt^n$$

odnosno

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n.$$

Iz ove jednakosti slijedi da je $A_0 = P(x_0)$. Diferenciranjem iste jednakosti i postavljanjem $x = x_0$ dobijamo da je $P'(x_0) = A_1$. Daljim diferenciranjem imamo da je $P^{(k)}(x_0) = A_k \cdot k!$, za $k = 2, 3, \cdots, n$.

Zato se polinom $P(x)$ može zapisati u obliku jednakosti

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

koja se naziva *Tejlorovom formulom za polinome.*

Primjer 1. Ako je $P(x) = x^2 - 3x + 2$ tada je $P'(x) = 2x - 3$ i $P''(x) = x$. U tački $x_0 = 1$ je $P(1) = 0$, $P'(1) = -1$, $P''(1) = 2$, pa se polinom $P(x)$ može zapisati u obliku

$$P(x) = 0 + (-1) \cdot (x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)^2 = -(x - 1) + (x - 1)^2.$$

Tejlorova formula

Izvedimo sada Tejlorovu formulu za funkcije koje nisu polinomi. Neka je funkcija f diferencijabilna $n + 1$ puta na intervalu I koji sadrži tačku x_0. Tada polinom

$$Q_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

nazivamo *Tejlorovim polinomom stepena n funkcije f za tačku x_0.*

Funkcija

$$R_{n+1}(x) = f(x) - Q_n(x)$$

tada predstavlja odstupanje funkcije f od njenog Tejlorovog polinoma i naziva se *Tejlorovim ostatkom.* Ostatak se može izraziti preko $(n+1)$–og izvoda funkcije f.

Neka je x_1 proizvoljna tačka intervala I. Tada je

$$f(x_1) = Q_n(x_1) + R_{n+1}(x_1).$$

Ostatak potražimo u obliku

$$R_{n+1}(x_1) = M(x_1 - x_0)^{n+1},$$

gdje M treba odrediti. Posmatrajmo zato funkciju

$\varphi(x) =$

$$f(x_1) - \left(f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n + M(x_1 - x)^{n+1} \right).$$

Prvi izvod ove funkcije na intervalu I jednak je

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n - M(n+1)(x_1 - x)^{n+1}.$$

Nije teško provjeriti da funkcija φ zadovoljava sve uslove Rolove teoreme na odsječku sa krajevima x_0 i x_1. Primjenom ove teoreme dobijamo da postoji tačka $\xi \in I, \xi \neq x_1$, takva da je

$$\varphi'(\xi) = -(x_1 - \xi)^n \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} - M(n+1) \right) = 0,$$

odakle je

$$M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Dakle,

$$R_{n+1}(x_1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}.$$

Pošto smo proizvoljno izabrali tačku x_1 sa intervala I, funkciju f možemo pisati u obliku

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

koji se naziva *Tejlorovom formulom za funkciju f*.

Specijalno, za $x_0 = 0$, Tejlorova formula se naziva *Meklorenovom formulom*.

Primjer 2. Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^x$. Pošto je $f^{(k)}(x) = e^x$ za svako $k \in N$, to je $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$. Po Tejlorovoj, odnosno Meklorenovoj, formuli je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

gdje je tačka ξ iz intervala sa krajevima 0 i x.

Primjer 3. Za funkciju $f(x) = \ln(1 + x)$ Meklorenova formula glasi

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}.$$

Ako u Tejlorovoj formuli za funkciju f ostatak $R_{n+1}(x) \to 0$ kada $n \to \infty$ za $x \in I$, tada se ona može pisati u obliku

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots, \ \ x \in I,$$

koji se naziva *Tejlorovim redom funkcije f u tački x_0*.

Primjer 4.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ \ \forall x \in R.$$

Primjer 5.

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \ \ -1 < x \leq 1.$$